

ALGUNOS ASPECTOS DEL TRATAMIENTO NUMERICO DE MODELOS MATEMATICOS

Pedro E. Zadunaisky

Comisión Nacional de Investigaciones Especiales
Av. Mitre 3100 - San Miguel - Argentina

RESUMEN

Desde hace varios años el objeto principal de nuestras investigaciones ha sido el de establecer un conjunto unificado de procedimientos destinados a estimar y corregir los errores introducidos o propagados en el tratamiento numérico de un tipo de modelos matemáticos que cubre una amplia gama de aplicaciones tanto en ciencias básicas como en problemas técnicos. Ya hemos demostrado la necesidad de ésta investigación en relación a un problema particular de Astronomía/1/. Esencialmente el modelo puede describirse como sigue.

En una primera etapa se asume que cierto fenómeno o fenómenos están caracterizados por un conjunto de magnitudes Y_r ($r=1,2,3,\dots,m$) que pueden variar siguiendo ciertas leyes representadas globalmente por un operador F tal que se pueda escribir.

$$(1) \quad F(A, Y) = 0.$$

En esta expresión Y es un vector de componentes Y_r y A es otro vector de componentes a_j ($j=1,2,\dots,K$) que son ciertos parámetros relacionados al fenómeno en cuestión. En nuestras aplicaciones (1) puede representar un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales, integro diferenciales, etc. Cuando se han hecho p mediciones u "observaciones" Y_r se puede, aplicando (1) establecer un sistema de $n (= p \times m)$ "ecuaciones de condición" de la forma

$$(2) \quad Q_i(a_1, a_2, \dots, a_K) = Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

que pueden ser lineales o no en los parámetros a_j .

La segunda etapa del proceso consiste en resolver el sistema (2) para obtener los parámetros a_j . Usualmente $n > k$, es decir que el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas y el sistema se resuelve ya sea en el sentido de los cuadrados mínimos, o bien por técnicas de "filtrado" (p.ej. Filtro Kalman) en modo de minimizar la varianza de los errores.

Estos procesos pueden reiterarse cuantas veces sea necesario hasta lograr un adecuado ajuste de las leyes representadas por F y de los parámetros a_j a la precisión y coherencia de las observaciones Y_r . Es evidente la importancia que reviste el obtener buenas estimaciones de los errores numéricos de la primera etapa para poder analizar luego su influencia en la segunda etapa y establecer así el grado de confiabilidad de los resultados finales. Desde este punto de vista creemos que el análisis que garantice un error relativo de 1 por ciento en un problema de Ingeniería requiere tanto cuidado como el que garantice el 0.00001 por ciento en un problema de Astronomía.

Para la primera etapa, en casos en que el operador F representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, hemos desarrollado un método de estimación de errores propagados que ha demostrado ser bastante eficiente en numerosas aplicaciones. Hemos estudiado sus bases teóricas y hallado un criterio de validez y otros autores han extendido nuestros resultados y hecho aplicaciones a otros problemas./2/. Recientemente hemos desarrollado también métodos eficientes para la corrección iterativa de soluciones aproximadas /4/.

Para el análisis de la segunda etapa también hemos obtenido algunos resultados y se ha demostrado la posibilidad de usar en este caso los llamados métodos de "análisis a posteriori" (backward analysis) muy poderosos y bien conocidos en la literatura /3/.

BIBLIOGRAFIA

/1/ P.E.ZADUNAISKY, "On the Determination of Non-Gravitational Forces Acting on Comets". Proceedings Int.Astr.Union Symposium 45, Dordrecht, Reidel Publ.Co., 1972 p.144-151.

/2/ P.E.ZADUNAISKY, "On the Estimation of Errors Propagated in the Numerical Integration of Ord.Diff.Equations", Numerische Mathematik (Springer), 27, 21-39, 1976.

H.J.STETTER, "Economical Global Error Estimation", Proceedings Symp.Stiff Systems, Wildbad, 1973, Plenum Publ., 1974.

P.ALFELD, "A Survey of Zadunaisky's Device Applied to Ord.Diff.Equations", M.Sc.Dissertation, University of Dundee, Scotland, 1975.

/3/ P.E.ZADUNAISKY, V.PEREYRA, "On the Convergence and Precision of a Process of Successive Differential Corrections", Proceedings I.F.I.P. Symposium, N.York, Mc Millan Co. vol.2, p.488-489, 1965.

V.PEREYRA, "Iterative Methods for Solving Non-Linear Least Squares Problems", SIAM Journal Num. Analysis, vol.4, pp.27-36, 1967.

/4/ P.E.ZADUNAISKY, G. Lafferriere, "On an Iterative Improvement of the Approximate Solution of Some Ordinary Differential Equations. Computers and Mathematics with Applications (Pergamon Press), 1980, Vol6, pp.147-154.

P.E.ZADUNAISKY, "On Efficient Methods for the Numerical Treatment of Some Types of Ordinary Differential Equations; Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Control Applications, Ober pfaffenhofen, F.R.Germany, Sept.1980 (Pergamon Press), en prensa.